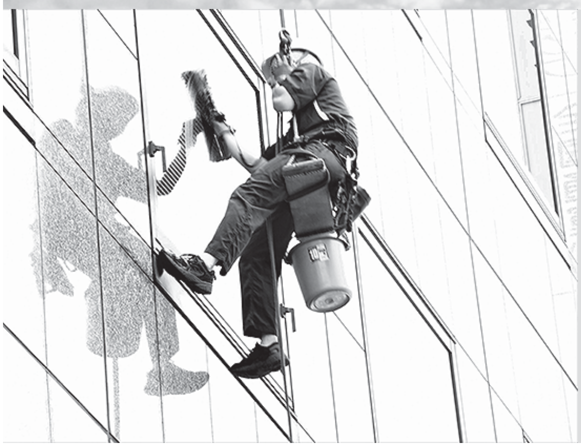
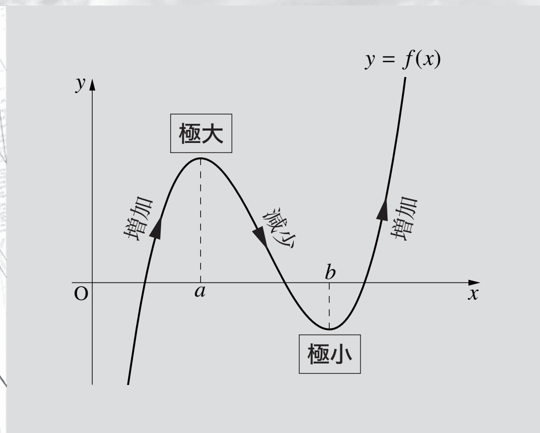
第 3 章

極限と微分積分の考え





§2 導関数と原始関数

探究 1 瞬間の速さはどれくらい？

高層ビルの窓を外側から拭いている光景をみたことはないだろうか。このような清掃員は，命綱をつけている。さらに，清掃用具もすべて体にロープで結び付けている。ライターや携帯電話をポケットにいれていないかも，事前に確認する。万が一，落とした時，非常に危険だからである。

2015 年には次のような事件もあった。「川崎市の武蔵小杉駅周辺の高層マンションが立ち並ぶ地域で，ペットボトルや皿が落ちてきたとの通報が 7 月から続き，28 日午後には新たに落下したとみられるガラス片のようなものが見つかった。けが人はいないが，神奈川県警は「危険性が高い」として軽犯罪法違反容疑で調べている。」2015.9.28 産経新聞朝刊 (共同通信配信)

高いところから物が落下した場合，どのくらい危険なのだろうか？　30m の高さ (マンション 10 階相当) から物が落下したとき，地上付近ではどのくらいの速さになっているか考えてみよう。

なお，下の表は，物体が落下してから x 秒後の落下距離 y m を計る実験から得られた一つのデータを記録したものである。

時間 (x)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
距離 (y)	0	0.049	0.196	0.441	0.784	1.225

問 1　落下を始めてから地上付近までにかかる時間はどのくらいか。

グラフはどうなるかな？

問 2　問 1 で求めた時間を t とする。$x = t$ における瞬間の速さを求めなさい。また，それはグラフ上ではどこに現れるか。

1 点だと直線は決まらないよね…？

関数 $f(x)$ において，x を限りなく a に近づけたとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくとき，この定まった値 α を関数 $f(x)$ の**極限値**といい，

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha \qquad \text{または} \qquad f(x) \to \alpha \ (x \to a)$$

と表す。

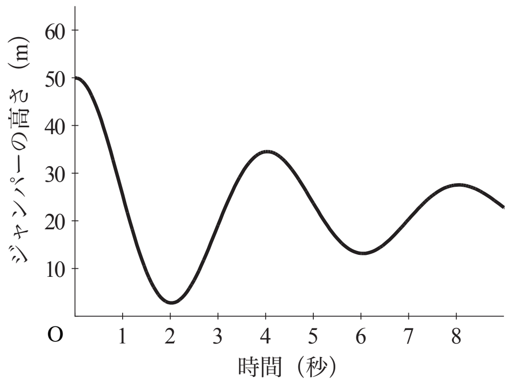
関数 $f(x)$ の極限値が α であるということは，$f(x)$ と α との差 $|f(x) - \alpha|$ がいくらでも小さくなるということである。すなわち，$\lim_{x\to a}|f(x) - \alpha| = 0$ または $|f(x) - \alpha| \to 0 \ (x \to a)$ ということである。

曲線上の 2 点 P，Q を通る直線があり，点 P を固定し，その曲線上で点 Q を点 P に限りなく近づけたとき，その極限としての直線を，点 P における接線という。

問 3　時間と速さを表すグラフを作成せよ。また，そのグラフは時間と距離を表すグラフにおいて，図形的には何を表しているか。

速度とは向きと大きさを持っている量，速さとは速度の大きさを表す量だよ。

確認 1　右のグラフは，バンジージャンプをしたときの時間と高さの関係を表している。このとき，時間と速度のグラフの概形をかきなさい。また，飛ぶ位置だけを変えた場合，時間と速度のグラフはどのように変化するだろうか。ただし，鉛直上向きを正の方向とする。



時間と変位の関数のグラフから，時間と速度の関数のグラフを求めることは，ある関数のグラフから，その各点における接線の傾きを表す関数を求めることに帰着する。

ある関数 $f(x)$ のグラフにおいて，各点における接線の傾きを表す関数は，

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

と表される。この関数を $y = f(x)$ の**導関数**といい，$f'(x)$ で表す。

Q　ある関数とその導関数のグラフの関係を調べよう

1　図1は，関数 $y = f(x)$ のグラフである。これを基に，導関数 $y = f'(x)$ の値の変化の様子を説明しなさい。

2　図2 は，関数 $y = f(x)$ の導関数 $y = f'(x)$ のグラフである。これを基に，関数 $y = f(x)$ の値の変化の様子を説明しなさい。

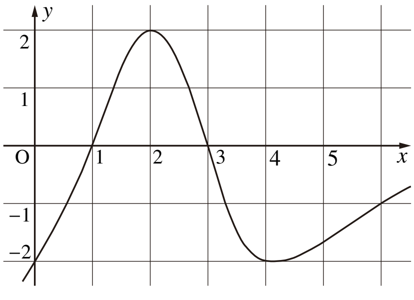


図1

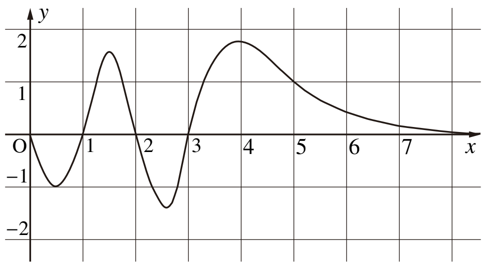


図2

このように，関数 $f(x)$ の導関数を基に，$f(x)$ の変化の様子をよみとることができる。

探究 2 落下距離はどれくらい？

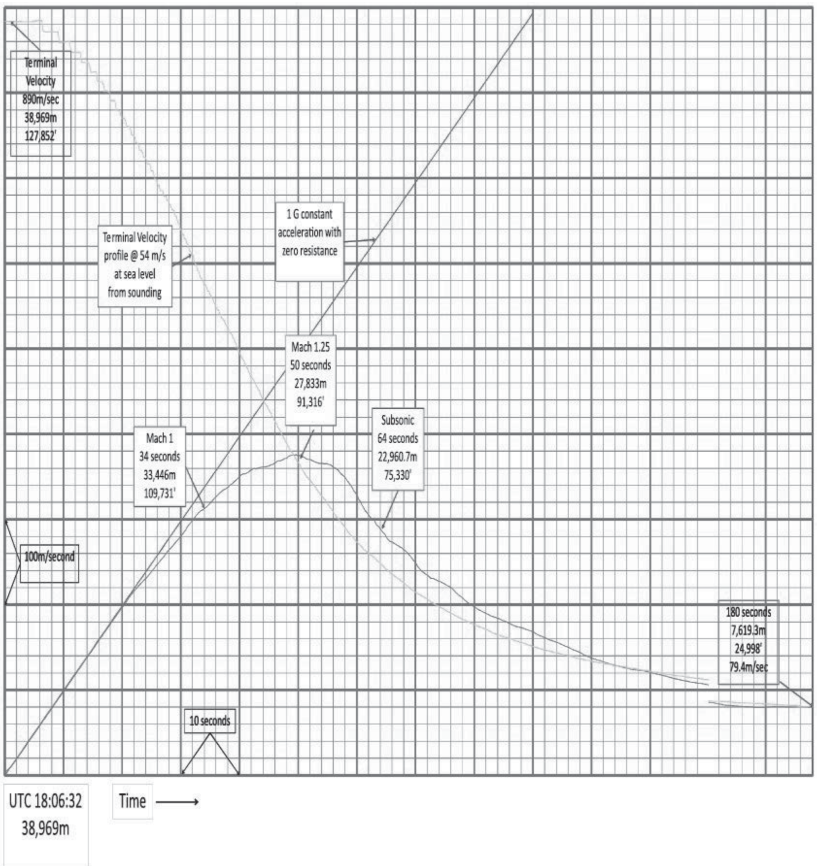
人類は，これまでに何度か成層圏からのスカイダイビングに成功している。当然，何年もの計画に下に実施されている。成層圏という環境に耐えられるような専用の与圧服を着用し，気球で成層圏まで上昇し，そこからダイブする。近年では，2012 年にフェリックス・バウムガルトナー氏が，2014 年にアラン・ユースタス氏が成層圏からのスカイダイビングに成功している。

バウムガルトナー氏は，高度 3 万 8969.3m からダイブし，最高速度 1342km/h を記録した。ユースタス氏は高度 4 万 1419m からダイブし，1322km/h を記録した。バウムガルトナー氏はフリーフォールによる最高落下速度記録保持者であり，ユースタス氏はスカイダイビングの最高高度記録保持者である。

バウムガルトナー氏による挑戦はある会社がスポンサーにつき，成層圏からのダイビングによる科学的なデータも多く集めることに成功している。落下速度の記録もその内の一つである。

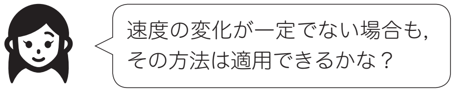
時速約 1200km が音速（マッハ）である。従って，両氏は音速を超えて落下したということになる。音速を超えるような速さでのダイビングは，数秒間にどれほどの距離を落下することになるのだろうか。

以下のグラフは，バウムガルトナー氏がダイブしているときの落下速度である。



出典：California Science Center(2013)SUMMARY REPORT：Findings of the Red Bull Stratos Scientic Summit(http://www.redbullstratos.com/science/scientific-data-review/index.html，最終閲覧日：2017/09/30)

問 1　グラフをみると，落下してから20秒間は直線とみることができる。落下後20秒間での落下距離はどのように求めたらよいだろうか。



問 2　落下後20秒間の落下距離を求めなさい。

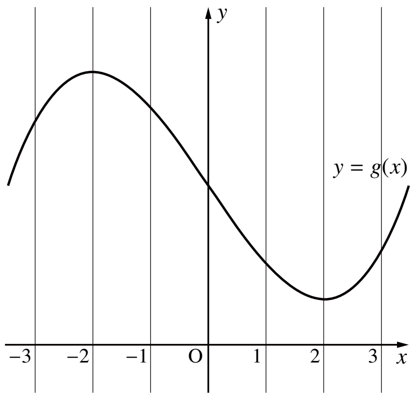
問 3　落下後x秒後$(0 \leqq x \leqq 20)$までの落下距離をxの関数として表すと，どのようになるだろうか。

やってみよう！

グラフを基に，落下し始めてから最高速度1342km/hが出た約50秒までの間に落下したおおよその距離を求めてみよう。

時間と速度の関数のグラフから時間と変位の関数のグラフを求めることは，ある関数のグラフの下の面積を求めることに帰着する。

Q　面積の変化の様子を探ろう



右の図で曲線$y = g(x)$について，点$\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{B}(a, g(a))$とし，$a \leqq x$である任意の実数xに対して，点$\mathrm{P}(x, 0)$, $\mathrm{Q}(x, g(x))$とする。

曲線$y = g(x)$とx軸および直線AB, PQで囲まれた図形APQBの面積を$S(x)$とする。これについて，以下の問いに答えなさい。

（1）$a = 0$のとき，$y = S(x)$の値の変化の様子を説明しなさい。

（2）$a = -3$のとき，$y = S(x)$の値の変化の様子を説明しなさい。

（3）（1）と（2）それぞれの$y = S(x)$のグラフはどのような関係にあるか答えなさい。

曲線$y = g(x)$とx軸および直線$x = a$, $x = b$で囲まれた部分の面積を$S(b)$とする。ただし，yが負となる場合はしばらく考えないこととする。また，特に断らない限り，$a < b$であるとする。

今までのことから，$a \leqq x \leqq b$のとき，

$$S(b) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} g\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)\frac{b-a}{n}$$

と表される。

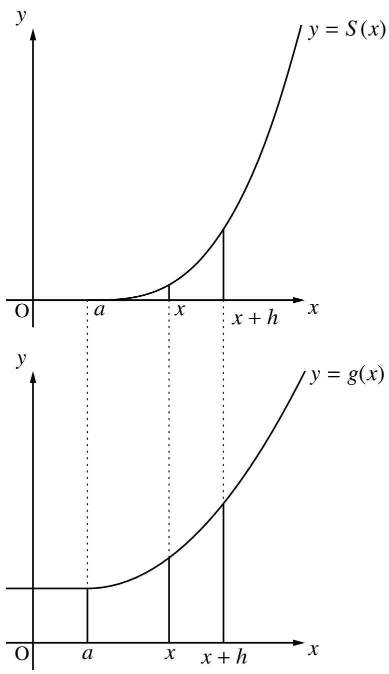
探究 3 接線の傾きと面積の関係は？

探究１と**探究２**での活動を整理すると，以下のようになる。

時間と変位を表す関数	→	時間と速度を表す関数
⇩		⇩
ある関数① $y = f(x)$	→	関数①のグラフの各点における接線の傾きを表す関数 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ：**導関数**

時間と変位を表す関数	←	時間と速度を表す関数
⇩		⇩
関数②のグラフの下の面積を表す関数 $S(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} g\left(a + \dfrac{x-a}{n}k\right) \dfrac{x-a}{n}$	←	ある関数② $y = g(x)$

これまでの活動を振り返ると，関数 $g(x)$ と $S(x)$ はどのような関係にあるだろうか。



問 1　関数 $g(x)$ と $S(x)$ はどのような関係にあると推測されるか。

問 2　**問１**で考えた関係が成り立つとすると，$y = g(x)$ のグラフは $y = S(x)$ のグラフにおいて図形的に何を表しているだろうか。

問 3　**問１**や**問２**で推測した関係を証明しなさい。

導関数に対して，元の関数を**原始関数**という。

すなわち，$F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を関数 $f(x)$ の原始関数という。

Q 原始関数は１つに定まるかな？

ある関数があるとき，その原始関数は1つに定まるかどうか，図形的に考えてみよう。

ある関数の導関数を求めることを**微分する**という。

ある関数の原始関数をもとめることを**積分する**という。

探究３より，微分することと積分することは，逆の演算であることがわかる。これを，微分積分学の基本定理という。

◯微分積分学の基本定理（Ｉ）◯

関数 $g(x)$ に対して，$S(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g\left(a + \frac{x-a}{n}k\right)\frac{x-a}{n}$ とおくと，

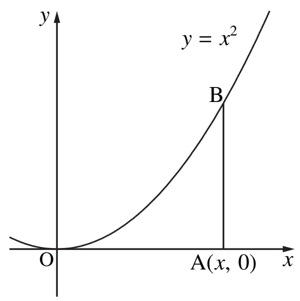
$$S'(x) = g(x)$$

が成り立つ。

確認１　$0 < x$ の任意の x について，点 $\mathrm{A}(x, 0)$, $\mathrm{B}(x, x^2)$ とする。曲線 $y = x^2$ と x 軸，および直線ABで囲まれた図形OABの面積を $S(x)$ とする。

(1)　$S(x)$ を求めなさい。

(2)　(1) で求めた関数の導関数を求めなさい。



これまで曲線 $y = f(x)$ の下の面積を求めるために区分求積法を用いてきた。しかし，微分積分学の基本定理(I)により，微分して $f(x)$ となるような関数 $F(x)$ がわかれば，区分求積法を用いずとも面積を計算できそうである。

次の§では，その計算の方法について詳しく考えてみよう。