

もくじ

INDEX

第 1 章 行列

- § 1 行列に表す
－行列とその加法・減法－ 6
- § 2 行列を使う
－行列の乗法とその性質－ 11
- § 3 行列を探る
－行列の性質と逆行列－ 24

第1章

行列

$$(x, y) = \left(\frac{dm - bn}{ad - bc}, \frac{-cm + an}{ad - bc} \right)$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



§ 1 行列に表す—行列とその加法・減法—

探究 1 SNS のフォロー—関係をモデル化しよう

人とかかわり方も時代とともに変化し、今やコミュニケーションの場として SNS を活用する人の数も増えてきている。SNS の多くは、「フォロワー」と「フォロー」の関係が成り立っている。そのフォローのパターン等によって、おすすめのユーザーが表示されたりする。コンピュータ上での処理であるから、このフォローのパターンが何らかの方法でモデル化されていると考えられる。

ここでは、簡単な場合を想定して、関係性をモデル化する方法を考えてみよう。



問 1 5 人のコミュニティを考えてみよう。A～E までの 5 人の、ある SNS におけるフォローの状態は次のとおりである。

- ・ A さんは、B・C・D・E をフォローしている。
- ・ B さんは、C・D・E をフォローしている。
- ・ C さんは、A・D をフォローしている。
- ・ D さんは、B・C・E をフォローしている。
- ・ E さんは、A・D をフォローしている。

この結果が見えやすくなるような表現の仕方としてはどのようなものがあるだろうか。

問 2 フォローの状態を数値化することを考えてみよう。「フォローしている」「フォローしていない」を数値化するアイデアとして、どのようなものが考えられるだろうか。

問 3 ちかこさんは、A～E さんのそれぞれについて、フォローしている人には「1」を、フォローしていない人には「0」と表すことにし、表にまとめることを考えた。ちかこさんのアイデアで、下の表を完成させなさい。

		フォローされる人				
		A	B	C	D	E
フォローする人	A					
	B					
	C					
	D					
	E					

問3の表から、数値だけを同じ並びのまま抜き出して、両側をかつこで囲んで、下のようにかくことにする。

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

このように、いくつかの数を長方形状に書き並べ、両側をかつこで囲んだものを**行列**といい、かつこの中のそれぞれの数を、この行列の**成分**という。

■ **問 4** 最もフォロワーが多い人は誰だろうか。それは行列のどの部分に着目して判断できるだろうか。
また、相互フォローの関係をみるためには、行列のどの部分に着目すればよいだろうか。

行列において、成分の横の並びを**行**といい、上から順に、第1行、第2行、第3行、…という。
また、成分の縦の並びを**列**といい、左から順に、第1列、第2列、第3列、…という。

例)

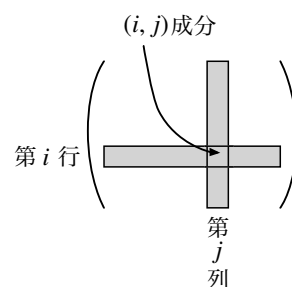
第1列 第2列 第3列

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left(\begin{array}{ccc} 31 & 15 & 2 \\ 19 & 20 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \text{第1行} \\ \leftarrow \text{第2行} \end{array} \end{array}$$

成分については、第*i*行と第*j*列の交点にある成分を、**(*i, j*)成分**という。

上の例でいうと、(2,3)成分は9ということになる。

なお、行列は大文字*A, B*などで表し、成分は小文字で表すことが多い。



■ **問 5** この5人について、別のSNSでは次のような関係があるという。この関係を行列で表してみよう。

- ・ Aさんは、D・Eをフォローしている。
- ・ Bさんは、A・Dをフォローしている。
- ・ Cさんは、Dをフォローしている。
- ・ Dさんは、A・B・Eをフォローしている。
- ・ Eさんは、Cをフォローしている。

■ **問 6** A～Eそれぞれが両方のSNSでフォローしている人が誰であるかを、行列を用いて特定してみよう。

SNS における関係性のモデル

SNS によっては他にもさまざまな機能が備わっていたり、同じ SNS 内に複数アカウントを所持していたりすることもある。具体的な SNS の機能を想定して、関係性のモデルを作成してみよう。

前ページの例で示した行列

$$\begin{pmatrix} 31 & 15 & 2 \\ 19 & 20 & 9 \end{pmatrix}$$

は、2つの行と3つの列をもっている。このような行列を2行3列の行列、または 2×3 行列という。一般に、行が m 個、列が n 個ある行列を、 **m 行 n 列の行列**または **$m \times n$ 行列**という。特に、 $n \times n$ 行列を **n 次正方行列**という。

2つの行列 A, B の行の個数と列の個数が、それぞれ一致するとき、 A と B は同じ型であるという。

2つの行列 A, B が同じ型で、しかも対応する成分がそれぞれ等しいとき、 A と B は等しいといい、 $A = B$ と書く。

また、同じ型の2つの行列 A, B の対応する成分の和を成分とする行列を、 A と B の**和**といい、 $A + B$ とかく。

たとえば、2次正方行列どうしの和は次のようになる。

Contents 行列の加法（2次正方行列の場合を例に）

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ の和は、

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$$

例)

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2 & 4+5 \\ -3+8 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 32 & 14 & -2 \\ 18 & -21 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & -6 & 1 \\ -14 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32+15 & 14-6 & -2+1 \\ 18-14 & -21+3 & 9+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 8 & -1 \\ 4 & -18 & 9 \end{pmatrix}$$

たとえば $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ に対して

$$A + A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

であるから、 $A + A$ は A の各成分を2倍した行列に等しい。

一般に、 k を実数とすると、行列 A の k 倍 kA は、 A の各成分をそれぞれ k 倍してできる行列であると定める。

Contents 行列の実数倍の定義（2次正方行列の場合を例に）

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{のとき, } kA = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

Contents 特別な行列と減法

$1 \times n$ 行列を n 次の行ベクトル、 $m \times 1$ 行列を m 次の列ベクトルという。たとえば $(1 \ 4 \ 10)$ は3次の行ベクトル、 $\begin{pmatrix} 6 \\ 25 \end{pmatrix}$ は2次の列ベクトルであるという。

また、すべての成分が0である行列を**零行列**といい、これを O で表す。以下はすべて零行列であるが、型が違う場合は、行列としては等しくないことに注意したい。

$$(0 \ 0), \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

一般に、行列 A と同じ型の零行列 O について、

$$A + O = O + A = A$$

が成り立つ。つまり、行列の加法では、零行列 O は、数0に相当している。

さてここで、行列 A に対して、 $(-1)A$ を $-A$ と表すことにする。すなわち $-A$ は、 A の各成分の符号を変えた行列ということである。これについて、以下が成り立つことがわかる。

$$A + (-A) = (-A) + A = O$$

この式は、行列 A と行列 $-A$ の和であるが、文字式と同じように考えれば、行列 A と行列 A の差とみることができる。一般に、同じ型の2つの行列 A, B の対応する成分の差を考え、それらを成分とする行列を A から B を引いた**差**といい、 $A - B$ と書く。

たとえば，2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ の差は，次のようになる。

$$A - B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{pmatrix}$$

例) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 0-4 \\ 2-(-1) & 1-1 \\ 0-0 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ここまでを踏まえれば，同じ型の行列 A, B, C などの和，差，実数倍の計算は，文字式と同じように考えて計算してよいことがわかる。したがって，次の計算法則が成り立つこともわかる。ただし， k, l は実数とする。

- [1] $A + B = B + A$ (交換法則)
- [2] $(A + B) + C = A + (B + C)$ (結合法則) ※ 単に $A + B + C$ と書いてもよい。
- [3] $k(A + B) = kA + kB$
- [4] $(k + l)A = kA + lA$
- [5] $k(lA) = (kl)A$